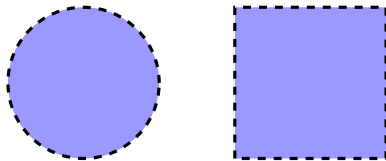


Espacios topológicos

Una **topología** sobre un conjunto X es una familia \mathcal{T} de subconjuntos de X tal que:

- i) \emptyset y X pertenecen a \mathcal{T} .
- ii) La unión de los elementos de cualquier subfamilia de \mathcal{T} está en \mathcal{T} .
- iii) La intersección de los elementos de cualquier subfamilia finita de \mathcal{T} está en \mathcal{T} .

Un **espacio topológico** es un par (X, \mathcal{T}) , formado por un subconjunto X y una topología \mathcal{T} sobre X . A los elementos de \mathcal{T} se les llama **subconjuntos abiertos**.



Un par de subconjuntos abiertos \mathbb{R}^2 con la topología usual (ver p.2)

Topología usual en \mathbb{R}

Sea $A \subset \mathbb{R}$. La **topología usual** en \mathbb{R} es

$$\mathcal{T}_u = \{A \subset \mathbb{R} \mid \text{para todo } x \in A \text{ existe } \varepsilon > 0 \text{ tal que } (x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset A\}.$$

Demostración de que \mathcal{T}_u es topología. a) Es inmediato que $\emptyset, \mathbb{R} \in \mathcal{T}_u$.

b) Sea $\{A_i \mid i \in I\} \subset \mathcal{T}_u$. Sea $x \in \bigcup_{i \in I} A_i$. Entonces existe $i_0 \in I$ tal que $x \in A_{i_0}$. Como $A_{i_0} \in \mathcal{T}_u$, existe $\varepsilon > 0$ tal que $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset A_{i_0}$.

Entonces $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset \bigcup_{i \in I} A_i$. Por tanto $\bigcup_{i \in I} A_i \in \mathcal{T}_u$.

c) Sea $\{A_1, A_2, \dots, A_n\} \subset \mathcal{T}_u$. Sea $x \in \bigcap_{i=1}^n A_i$.

Entonces $x \in A_i$ para todo $i \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Para cada $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, como $A_i \in \mathcal{T}_u$, existe $\varepsilon_i > 0$ tal que $(x - \varepsilon_i, x + \varepsilon_i) \subset A_i$.

Sea $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n\}$. Entonces $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset \bigcap_{i=1}^n A_i$. Por tanto $\bigcap_{i=1}^n A_i \in \mathcal{T}_u$.

Ejercicio 1. ¿Cuáles de los siguientes subconjuntos de \mathbb{R} son abiertos en \mathcal{T}_u ?

a) $A_1 = \{0\}$

b) $A_2 = (a, b)$

c) $A_3 = [a, b]$

d) $A_4 = (a, b], a < b$

e) $A_5 = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left[-\frac{n}{n+1}, \frac{n}{n+1} \right]$

f) $A_6 = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n} \right)$

Topología usual en \mathbb{R}^n

Dados $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ y $\varepsilon > 0$, la bola euclídea de centro \mathbf{x} y radio ε es el conjunto

$$B_\varepsilon(\mathbf{x}) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) < \varepsilon\},$$

donde, si $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ e $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)$,

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}.$$

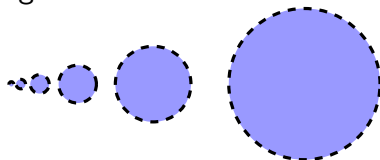
Sea $A \subset \mathbb{R}^n$. La **topología usual** en \mathbb{R}^n es

$$\mathcal{T}_u = \{A \subset \mathbb{R}^n \mid \text{para todo } x \in A \text{ existe } \varepsilon > 0 \text{ tal que } B_\varepsilon(x) \subset A\}.$$

Si $A \in \mathcal{T}$, se dice que A es abierto en la topología usual.

Observación. la demostración de que \mathcal{T}_u es una topología es exactamente igual que para \mathbb{R} reemplazando $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ por $B_\varepsilon(x)$.

Ejemplo. Un subconjunto abierto de la topología usual en \mathbb{R}^2 :



Conjuntos cerrados

Un subconjunto A de un espacio topológico X se dice que es **cerrado** si el conjunto $X \setminus A$ es abierto.

Ejemplos. El subconjunto $[a, b]$ de \mathbb{R} es cerrado con la topología usual porque su complementario $\mathbb{R} \setminus [a, b] = (-\infty, a) \cup (b, +\infty)$ es abierto. Análogamente, $[a, +\infty)$ es cerrado, porque su complementario $(-\infty, a)$ es abierto. El subconjunto $[a, b]$ de \mathbb{R} no es abierto ni cerrado.

Propiedades. Sea X un espacio topológico. Entonces:

- a) \emptyset y X son cerrados.
- b) Las intersecciones arbitrarias de subconjuntos cerrados son cerradas.
- c) Las uniones finitas de subconjuntos cerrados son cerradas.

Demostración. a) X y \emptyset son cerrados porque sus complementarios, \emptyset y X , son abiertos.

b) Dada una familia de subconjuntos cerrados $\{A_i \mid i \in I\}$, aplicando las leyes de De Morgan, se tiene que $X \setminus (\bigcap_{i \in I} A_i) = \bigcup_{i \in I} (X \setminus A_i)$ que es abierto por serlo cada $X \setminus A_i$. Luego $\bigcap_{i \in I} A_i$ es cerrado.

c) Dada una familia de subconjuntos cerrados $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$, aplicando las leyes de De Morgan, se tiene que $X \setminus (\bigcup_{i=1}^n A_i) = \bigcap_{i=1}^n (X \setminus A_i)$ que es abierto por serlo cada $X \setminus A_i$. Luego $\bigcup_{i=1}^n A_i$ es cerrado.

Topologías básicas en cualquier conjunto

Si X es un conjunto cualquiera:

- a) $\mathcal{T}_D = \mathcal{P}(X)$ es la **topología discreta** en X .
- b) $\mathcal{T}_T = \{\emptyset, X\}$ es la **topología trivial** en X .
- c) $\mathcal{T}_{CF} = \{U \subset X \mid |X \setminus U| \text{ finito}\} \cup \emptyset$ es la topología de los **complementos finitos**.
- d) $\mathcal{T}_{CN} = \{U \subset X \mid |X \setminus U| \text{ finito o numerable}\} \cup \emptyset$ es la **topología de los complementos numerables** en X .

Ejercicio 2. Demuestra que todas las anteriores son topologías en X .

Ejercicios

Ejercicio 3. Encuentra todas las topologías en un conjunto con:

a) 1 elemento, **b)** 2 elementos, **c)** 3 elementos,

Ejercicios

Ejercicio 4. \mathcal{T} es la topología discreta en $X \Leftrightarrow \{p\}$ es un conjunto abierto, $\forall p \in X$.

Ejercicios de topologías

Ejercicio 5. Sea X un conjunto y sea $a \in X$. Estudiar si son topologías en X :

a) $\mathcal{T}_a = \{U \subset X \mid a \in U\} \cup \emptyset$. **b)** $\mathcal{T}'_a = \{U \subset X \mid a \notin U\} \cup X$.

Ejercicios de topologías

Ejercicio 6. Sea X un conjunto y sea $a \in X$. Estudiar si son topologías en X :

c) $\mathcal{T}_a'' = \mathcal{T}_a' \cup \{U \subset X \mid a \in U, X \setminus U \text{ finito}\}$. **d)** $\mathcal{T}_\infty = \{U \subset X \mid X \setminus U \text{ infinito}\} \cup \emptyset \cup X$.

Ejercicios de topologías

Ejercicio 7. Sea $\mathcal{T} = \{\mathbb{R}^2, \emptyset\} \cup \{G_k : k \in \mathbb{R}\}$ donde $G_k = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > y + k\}$.

- a) Demostrar que \mathcal{T} es una topología en \mathbb{R}^2 .
- b) ¿Es \mathcal{T} una topología en \mathbb{R}^2 si “ $k \in \mathbb{R}$ ” se sustituye por “ $k \in \mathbb{N}$ ”?
- c) ¿Y si se sustituye por “ $k \in \mathbb{Q}$ ”?

Comparación de topologías

Sean \mathcal{T} y \mathcal{T}' dos topologías sobre un conjunto dado X . Si $\mathcal{T}' \supset \mathcal{T}$, diremos que \mathcal{T}' es **más fina** que \mathcal{T} . Si $\mathcal{T}' \supsetneq \mathcal{T}$, diremos que \mathcal{T}' es **estrictamente más fina** que \mathcal{T} . Diremos que \mathcal{T} es **comparable** con \mathcal{T}' si $\mathcal{T}' \supset \mathcal{T}$ o $\mathcal{T} \supset \mathcal{T}'$.

Observación. Dado X , la topología discreta es más fina que cualquier otra topología, y cualquier topología es más fina que la topología trivial. ¿Cuál es más fina, \mathcal{T}_{CF} o \mathcal{T}_{CN} ?

Ejercicio 8. Compara las nueve topologías en el conjunto $X = \{a, b, c\}$.

Ejercicios de comparación de topologías

Ejercicio 9. Encontrar dos topologías $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$ sobre un subconjunto X de modo que $\mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2$ no sea una topología. Encontrar una topología que contiene a ambas y es la menos fina de todas las que verifican esta propiedad.

Ejercicio 10. Sea X un subconjunto infinito y \mathcal{T} una topología en X en la que todos los subconjuntos infinitos son abiertos. Demostrar que \mathcal{T} es la topología discreta en X .

Ejercicios de comparación de topologías

Ejercicio 11. Se considera en \mathbb{R}^2 la familia \mathcal{T} de todos los subconjuntos U tales que para cada (a, b) de U existe $\varepsilon > 0$ tal que $((a - \varepsilon, a + \varepsilon) \times \{b\}) \cup (\{a\} \times (b - \varepsilon, b + \varepsilon)) \subset U$. Estudiar si \mathcal{T} es una topología en \mathbb{R}^2 . En caso afirmativo compararla con la topología usual.

Base de una topología \mathcal{T}

Sea (X, \mathcal{T}) un espacio topológico. Se dice que $\mathcal{B}_{\mathcal{T}} \subset \mathcal{T}$ es una base para \mathcal{T} si para todo $U \in \mathcal{T}$ y todo $x \in U$ existe $B \in \mathcal{B}_{\mathcal{T}}$ tal que $x \in B \subset U$.

A los subconjuntos abiertos de $\mathcal{B}_{\mathcal{T}}$ se les llama abiertos básicos de la topología.

Ejemplos. a) $\mathcal{B}_1 = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ es base de la topología usual sobre la recta real.

a) $\mathcal{B}_2 = \{B_{\varepsilon}(x) \mid x \in \mathbb{R}^2, \varepsilon > 0\}$ es también base de la topología usual en \mathbb{R}^2 .

a) $\mathcal{B}_3 = \{(a, b) \times (c, d) \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}, a < b, c < d\}$ es otra base de la topología usual en \mathbb{R}^2 .

Proposición. Sea (X, \mathcal{T}) un espacio topológico. Entonces $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$ es una base para \mathcal{T} si cada elemento de \mathcal{T} es unión de elementos de \mathcal{B} .

Demostración (Inmediata). \Rightarrow) Sea $U \in \mathcal{T}$. Entonces para todo $x \in U$ existe $B_x \in \mathcal{B}_{\mathcal{T}}$ tal que $x \in B_x \subset U$. Luego $U = \bigcup_{x \in U} B_x$ es unión de elementos de \mathcal{B} .

\Leftarrow) Sea $U \in \mathcal{T}$. Existe $\{B_i \mid i \in I\} \subset \mathcal{B}$ tal que $U = \bigcup_{i \in I} B_i$. Dado $x \in U$, existe $i \in I$ tal que $x \in B_i \subset U$.

Ejercicio 12. Sea $\mathcal{T} = \{U \subset \mathbb{R}^2 \mid \text{para cada } x \in U \text{ existe } \varepsilon > 0 \text{ tal que } C(x, \varepsilon) \subset U\}$, donde, si $x = (a, b)$, $C(x, \varepsilon) = ((a - \varepsilon, a + \varepsilon) \times \{b\}) \cup (\{a\} \times (b - \varepsilon, b + \varepsilon))$.

¿Es $\mathcal{B} = \{C(x, \varepsilon) \mid x \in \mathbb{R}^2, \varepsilon > 0\}$ una base de \mathcal{T} ?

Base de topología

Dado un subconjunto X , una base de topología sobre X es una familia \mathcal{B} de subconjuntos de X tales que:

- a) Para cada $x \in X$, existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B$ (es decir, $\bigcup_{B \in \mathcal{B}} B = X$).
- b) Si $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ y $x \in B_1 \cap B_2$, existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B \subset B_1 \cap B_2$.

Proposición. Sea \mathcal{B} una base de topología sobre X , y sea

$$\mathcal{T}_{\mathcal{B}} = \{U \subset X \mid \text{para cada } x \in U \text{ existe } B \in \mathcal{B} \text{ tal que } x \in B \subset U\}.$$

Entonces $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$ es una topología en X de la que \mathcal{B} es una base.

Demostración. a) Es inmediato que $\emptyset, \mathbb{R} \in \mathcal{T}_{\mathcal{B}}$.

b) Sea $\{U_i \mid i \in I\} \subset \mathcal{T}_{\mathcal{B}}$. Sea $x \in \bigcup_{i \in I} U_i$. Entonces existe $i_0 \in I$ tal que $x \in U_{i_0}$. Como $U_{i_0} \in \mathcal{T}_{\mathcal{B}}$, existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B \subset U_{i_0}$. Entonces $x \in B \subset \bigcup_{i \in I} U_i$. Por tanto $\bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{T}_{\mathcal{B}}$.

c) Sean $U_1, U_2 \in \mathcal{T}_{\mathcal{B}}$. Sea $x \in U_1 \cap U_2$. Entonces $x \in U_i$ para todo $i \in \{1, 2\}$. Para cada $i \in \{1, 2\}$, como $U_i \in \mathcal{T}_{\mathcal{B}}$, existe $B_i \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B_i \subset U_i$. Por (b) existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B \subset B_1 \cap B_2 \subset U_1 \cap U_2$. Por tanto $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{T}_{\mathcal{B}}$. La demostración de que $\{U_1, U_2, \dots, U_n\} \subset \mathcal{T}_{\mathcal{B}} \Rightarrow \bigcap_{i=1}^n U_i \in \mathcal{T}_{\mathcal{B}}$ se haría por inducción.

Definición. Se dice que $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$ es la **topología generada por la base de topología** \mathcal{B} .

La topología del límite inferior

Proposición. Demuestra que $\mathcal{B}' = \{[a, b) \mid a < b\}$ es una base de topología en \mathbb{R} .

Demostración. a) Para cada $x \in \mathbb{R}$, existe $[x, x+1) \in \mathcal{B}'$ tal que $x \in [x, x+1)$.

b) Si $[a, b), [c, d) \in \mathcal{B}'$ y $x \in [a, b) \cap [c, d)$, y tomamos $e = \max\{a, c\}$, $f = \min\{b, d\}$, se tiene $x \in [e, f) \subset [a, b) \cap [c, d)$.

Definición. La topología generada por \mathcal{B}' se denota $\mathcal{T}_{[)}$ y se llama **topología del límite inferior** sobre \mathbb{R} .

Observación. En esta topología el conjunto $[0, 1)$ es un conjunto abierto que contiene al punto 0.



Dos abiertos de la topología del límite inferior que contienen al punto 0

$[0, 1)$ también es cerrado porque su complementario es $(-\infty, 0) \cup [1, \infty)$ que es abierto.

Ejercicio 13. ¿Cuáles de los siguientes subconjuntos son abiertos en $\mathcal{T}_{[)}$?

a) $A_1 = \{0\}$, b) $A_2 = (a, b)$, c) $A_3 = [a, b]$, d) $A_4 = (a, b]$, $a < b$,

Comparación de topologías a partir de sus bases

Proposición. Sean \mathcal{B} y \mathcal{B}' bases para las topologías \mathcal{T} y \mathcal{T}' , respectivamente, sobre X . Entonces son equivalentes:

- a) $\mathcal{T}' \supset \mathcal{T}$ (\mathcal{T}' es más fina que \mathcal{T}).
- b) $\mathcal{T}' \supset \mathcal{B}$.

Demostración. (a) \Rightarrow (b) es obvia.

(b) \Rightarrow (a) Sea $U \in \mathcal{T}$, y queremos probar que $U \in \mathcal{T}'$. Sea $x \in U$. Puesto que \mathcal{B} genera \mathcal{T} , existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B \subset U$. Por (c), $B \in \mathcal{T}'$, luego existe $B' \in \mathcal{B}'$ tal que $x \in B' \subset B$. Entonces $x \in B' \subset U$, por lo que $U \in \mathcal{T}'$.

Ejercicio 14. ¿Qué relación hay entre \mathcal{T}_u y $\mathcal{T}_{[\]}$?

Subbase de topología

Sea X un subconjunto. Una **subbase \mathcal{S} de topología** sobre X es cualquier familia de subconjuntos de X cuya unión es igual a X .

Proposición. Sea \mathcal{S} una subbase de topología sobre X , y sea $\mathcal{B}_{\mathcal{S}}$ la familia de todas las intersecciones finitas de elementos de \mathcal{S} .

Entonces $\mathcal{B}_{\mathcal{S}}$ es una base de topología en X tal que $\mathcal{S} \subset \mathcal{B}$.

Demostración. Dado $x \in X$, existe $S \in \mathcal{S}$ tal que $x \in S$ y por tanto existe $B \in \mathcal{B}_{\mathcal{S}}$ tal que $x \in B$.

Sean $B, B' \in \mathcal{B}_{\mathcal{S}}$. Entonces $B \cap B'$ es también una intersección finita de elementos de \mathcal{S} , por lo que pertenece a $\mathcal{B}_{\mathcal{S}}$.

Definición. La topología generada por $\mathcal{B}_{\mathcal{S}}$ se denota $\mathcal{T}_{\mathcal{S}}$ y se dice que está **generada por la subbase de topología \mathcal{S}** .

Ejemplo. Sea $X = \{a, b, c, d\}$ y sea $\mathcal{S} = \{\{a\}, \{b, c\}, \{c, d\}\}$, que es una subbase de topología, pues la unión de sus elementos es X .

Añadiendo las intersecciones finitas obtenemos $\mathcal{B}_{\mathcal{S}} = \{\{a\}, \{c\}, \{b, c\}, \{c, d\}\}$.

Añadiendo el conjunto vacío y las uniones arbitrarias de elementos de $\mathcal{B}_{\mathcal{S}}$ obtenemos $\mathcal{T}_{\mathcal{S}} = \{\emptyset, \{a\}, \{c\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{c, d\}, \{a, b, c\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\}, \{a, b, c, d\}\}$, que es la topología generada por \mathcal{S} .

Ejercicios de bases de topologías

Ejercicio 15. Sea $K = \left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \right\} \subset \mathbb{R}$, sea \mathcal{B}_u una base de la topología usual en \mathbb{R} y sea $\mathcal{B}_K = \mathcal{B}_u \cup \{B \setminus K \mid B \in \mathcal{B}_u\}$. Demostrar que \mathcal{B}_K es base de una topología. Considera los conjuntos K y $K \cup \{0\}$. ¿Son cerrados en la topología generada por \mathcal{B}_K ?

Ejercicios de bases de topologías

- Ejercicio 16.** a) Demuestra que $\mathcal{B}_1 = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{Q}, a < b\}$ es una base numerable de la topología usual \mathcal{T}_u en \mathbb{R} .
- b) Demuestra que $\mathcal{B}_2 = \{[a, b) : a, b \in \mathbb{Q}, a < b\}$ es base para una topología.
- c) ¿Qué relación hay entre $\mathcal{T}_{\mathcal{B}_2}$ y $\mathcal{T}_{[\]}$?

Observación. Análogamente, son bases numerables de la topología usual en \mathbb{R}^2 : $\mathcal{B}_1 = \{B_\varepsilon((a, b)) \mid a, b, \varepsilon \in \mathbb{Q}, \varepsilon > 0\}$ y $\mathcal{B}_2 = \{(a, b) \times (c, d) \mid a, b, c, d \in \mathbb{Q}\}$.

Ejercicios de bases de topologías

Ejercicio 17. Define una topología en \mathbb{R} (dando la lista de los subconjuntos abiertos) que contenga como abiertos a los subconjuntos $(0, 2)$ and $(1, 3)$ y que sea lo menos fina posible.

Ejercicios de bases de topologías

Ejercicio 18. Sean las siguientes familias de subconjuntos de $[0, 1]$:

$$\mathcal{B}_1 = \{(a, b) \mid 0 < a < b < 1\} \cup \{[0, 1], \emptyset\}, \quad \mathcal{B}_2 = \mathcal{B}_1 \cup \{\{0\}, \{1\}\},$$

$$\mathcal{B}_3 = \{(a, b) \mid 0 \leq a < b \leq 1\} \cup \{[0, 1], \emptyset\}, \quad \mathcal{B}_4 = \mathcal{B}_3 \cup \{\{0\}, \{1\}\}$$

i) ¿Son bases de topología?

ii) Si lo son, compara las topologías \mathcal{T}_i generadas por ellas.

Clasificación de los puntos de un subconjunto

Sea X es un espacio topológico y sea $x \in X$. Se dice que $U \subset X$ es un **entorno** de x si U es un subconjunto abierto que contiene a x .

Se denota por \mathcal{U}^x la **familia de entornos** de x .

Observación. En muchos libros, un entorno U de x es un subconjunto, no necesariamente abierto, que contiene un abierto que contiene a x .

Sea X es un espacio topológico, sea $A \subset X$ y sea $x \in X$. Entonces x es:

- a) un **punto interior** de A si existe $U \in \mathcal{U}^x$ tal que $U \subset A$,
- b) un **punto adherente** de A si para todo $U \in \mathcal{U}^x$, $U \cap A \neq \emptyset$,
- c) un **punto de acumulación** de A si para todo $U \in \mathcal{U}^x$, $(U \setminus \{x\}) \cap A \neq \emptyset$.
- d) un **punto aislado** de A si existe $U \in \mathcal{U}^x$ tal que $U \cap A = \{x\}$,
- e) un **punto frontera** de A si para todo $U \in \mathcal{U}^x$, $U \cap A \neq \emptyset$, $U \cap (X \setminus A) \neq \emptyset$.

Se define el **interior** \mathring{A} , la **adherencia** \bar{A} y la **frontera** $\text{Fr}(A)$ de A como el subconjunto de puntos interiores, adherentes y frontera, respectivamente, de A .

El subconjunto de puntos de acumulación se denota A' y el de puntos aislados $I(A)$.

Observación. Para estudiar el carácter de un punto basta considerar, en vez de entornos cualesquiera de x , entornos que sean elementos de una base de la topología en X .

Clasificación de los puntos de un subconjunto

Ejemplos en \mathbb{R} para distintas topologías.

	$A = \{0\}$					$A = [0, 1]$				
	\bar{A}	$\overset{\circ}{A}$	$\text{Fr}(A)$	A'	$I(A)$	\bar{A}	$\overset{\circ}{A}$	$\text{Fr}(A)$	A'	$I(A)$
\mathcal{T}_t	\mathbb{R}	\emptyset	\mathbb{R}	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	$\{0\}$	\mathbb{R}	\emptyset	\mathbb{R}	\mathbb{R}	\emptyset
\mathcal{T}_d	$\{0\}$	$\{0\}$	\emptyset	\emptyset	$\{0\}$	$[0, 1]$	$[0, 1]$	\emptyset	\emptyset	$[0, 1]$
\mathcal{T}_{CF}	$\{0\}$	\emptyset	$\{0\}$	\emptyset	$\{0\}$	\mathbb{R}	\emptyset	\mathbb{R}	\mathbb{R}	\emptyset
\mathcal{T}_{CN}	$\{0\}$	\emptyset	$\{0\}$	\emptyset	$\{0\}$	\mathbb{R}	\emptyset	\mathbb{R}	\mathbb{R}	\emptyset
\mathcal{T}_u	$\{0\}$	\emptyset	$\{0\}$	\emptyset	$\{0\}$	$[0, 1]$	$(0, 1)$	$\{0, 1\}$	$[0, 1]$	\emptyset
$\mathcal{T}_{[)}$	$\{0\}$	\emptyset	$\{0\}$	\emptyset	$\{0\}$	$[0, 1]$	$[0, 1)$	$\{1\}$	$[0, 1)$	$\{1\}$
\mathcal{T}_0	\mathbb{R}	$\{0\}$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	$\{0\}$	\mathbb{R}	$[0, 1]$	$\mathbb{R} \setminus [0, 1]$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	$\{0\}$
\mathcal{T}_2	$\{0\}$	\emptyset	$\{0\}$	\emptyset	$\{0\}$	$[0, 1]$	\emptyset	$[0, 1]$	\emptyset	$[0, 1]$

Clasificación de los puntos de un subconjunto

Propiedades. Dado un subconjunto A de un espacio topológico X :

- a) $\mathring{A} \subset A \subset \bar{A}$.
- b) \mathring{A} es un subconjunto abierto y \bar{A} es un subconjunto cerrado.
- c) \mathring{A} es el mayor abierto contenido en A (si U abierto $U \subset A \Rightarrow U \subset \mathring{A}$).
- d) \bar{A} es el menor cerrado que contiene a A (si F cerrado $A \subset F \Rightarrow \bar{A} \subset F$).
- e) A es abierto si y solo si $\mathring{A} = A$, y A es cerrado si y solo si $\bar{A} = A$.

Demostración. a) Inmediato a partir de la definición de \mathring{A} y \bar{A} .

b) Para todo $x \in \mathring{A} \Leftrightarrow$ existe U_x abierto tal que $x \in U_x \subset A (\Rightarrow U_x \subset \mathring{A}) \Rightarrow \mathring{A} = \bigcup_{x \in \mathring{A}} U_x$ abierto (por ser unión de abiertos).

c) Para todo $x \notin \bar{A}$ existe U_x abierto tal que $x \in U_x$ y $U_x \cap A = \emptyset (\Rightarrow U_x \cap \bar{A} = \emptyset) \Rightarrow$ para todo $x \notin \bar{A}$ existe F_x cerrado tal que $x \notin F_x$ y $\bar{A} \subset F_x \Leftrightarrow \bar{A} = \bigcap_{x \in \bar{A}} F_x$ cerrado (por ser intersección de cerrados).

c) Inmediato.

d) $A \subset F$ cerrado $\Rightarrow X \setminus F$ abierto tal que $(X \setminus F) \cap A = \emptyset \Rightarrow (X \setminus F) \cap \bar{A} \Rightarrow \bar{A} \subset F$.

e) Inmediato por las propiedades anteriores.

Clasificación de los puntos de un subconjunto

Más propiedades. Dado un subconjunto A de un espacio topológico X :

- f) $\bar{A} = \mathring{A} \cup \text{Fr}(A)$ (unión disjunta).
- g) $\bar{A} = A' \cup I(A)$ (unión disjunta).
- h) $\bar{A} = A \cup A'$ (unión no necesariamente disjunta).
- i) A es cerrado si y solo si $A' \subset A$.

Demostración. f) El contenido \supset es inmediato a partir de la definición de \bar{A} , \mathring{A} y $\text{Fr}(A)$.

Supongamos $x \in \bar{A}$. Entonces para todo $U \in \mathcal{U}^x$, $U \cap A \neq \emptyset$.

Entonces, o bien existe $U \in \mathcal{U}^x$ tal que $U \cap (X \setminus A) = \emptyset$ (en cuyo caso $x \in \mathring{A}$), o bien para todo $U \in \mathcal{U}^x$ es $U \cap (X \setminus A) \neq \emptyset$ (en cuyo caso $x \in \text{Fr}(A)$).

Además, del razonamiento anterior se deduce que $\mathring{A} \cap \text{Fr}(A) = \emptyset$

g) Se demuestra de forma análoga a (f)

h) El contenido \supset es inmediato a partir de la definición de \bar{A} y A' .

Supongamos $x \in \bar{A}$. Entonces para todo $U \in \mathcal{U}^x$, $U \cap A \neq \emptyset$. Si $x \notin A$, para todo $U \in \mathcal{U}^x$ se tiene $U \cap (A \setminus \{x\}) \neq \emptyset$ y por tanto $x \in A'$.

i) A cerrado $\Leftrightarrow A = \bar{A} \Leftrightarrow A = A \cup A' \Leftrightarrow A' \subset A$.

Clasificación de los puntos de un subconjunto

Casos particulares.

j) En cualquier espacio topológico (X, \mathcal{T}) :

- si $A = \emptyset$: $\bar{A} = \mathring{A} = \text{Fr}(A) = A' = I(A) = \emptyset$,

- si $A = X$: $\bar{A} = \mathring{A} = X$, $\text{Fr}(A) = \emptyset$, $I(A) = \{x \mid \{x\} \in \mathcal{T}\}$, $A' = X \setminus I(A)$.

k) En (X, \mathcal{T}_t) , si $A \neq \emptyset$, X : $\bar{A} = X$, $\mathring{A} = \emptyset$, $\text{Fr}(A) = X$,

$$A' = \begin{cases} X \setminus \{a\} & \text{si } A = \{a\} \\ X & \text{si } |A| \geq 2 \end{cases}, \quad I(A) = \begin{cases} \{a\} & \text{si } A = \{a\} \\ \emptyset & \text{si } |A| \geq 2 \end{cases}.$$

l) En (X, \mathcal{T}_d) , si $A \neq \emptyset$, X : $\bar{A} = A$, $\mathring{A} = A$, $\text{Fr}(A) = \emptyset$, $A' = \emptyset$, $I(A) = A$.

m) En (X, \mathcal{T}_a) , si $A \neq \emptyset$, X :

$$\bar{A} = \begin{cases} X & \text{si } a \in A \\ A & \text{si } a \notin A \end{cases}, \quad \mathring{A} = \begin{cases} A & \text{si } a \in A \\ \emptyset & \text{si } a \notin A \end{cases}, \quad \text{Fr}(A) = \begin{cases} X \setminus A & \text{si } a \in A \\ A & \text{si } a \notin A \end{cases},$$

$$A' = \begin{cases} X \setminus \{a\} & \text{si } a \in A \\ \emptyset & \text{si } a \notin A \end{cases}, \quad I(A) = \begin{cases} \{a\} & \text{si } a \in A \\ A & \text{si } a \notin A \end{cases}.$$

Ejercicio: Obtén caracterizaciones similares para \mathcal{T}_{CF} y \mathcal{T}_{CN} .

Clasificación de los puntos de un subconjunto

Ejemplos en \mathbb{R} con \mathcal{T}_u y $\mathcal{T}_{[,)}$.

\mathcal{T}_u									
A	$\{0\}$	$\{0, 1\}$	$\{\frac{1}{n}\}$	$\{\frac{1}{n}\} \cup \{0\}$	$(0, 1)$	$[0, 1]$	\mathbb{Q}	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	\mathbb{R}
\bar{A}	$\{0\}$	$\{0, 1\}$	$\{\frac{1}{n}\} \cup \{0\}$	$\{\frac{1}{n}\} \cup \{0\}$	$[0, 1]$	$[0, 1]$	\mathbb{R}	\mathbb{R}	\mathbb{R}
$\overset{\circ}{A}$	\emptyset	\emptyset	\emptyset	\emptyset	$(0, 1)$	$(0, 1)$	\emptyset	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	\mathbb{R}
$\text{Fr}(A)$	$\{0\}$	$\{0, 1\}$	$\{\frac{1}{n}\} \cup \{0\}$	$\{\frac{1}{n}\} \cup \{0\}$	$\{0, 1\}$	$\{0, 1\}$	\mathbb{R}	$\{0\}$	\emptyset
A'	\emptyset	\emptyset	$\{0\}$	$\{0\}$	$[0, 1]$	$[0, 1]$	\mathbb{R}	\mathbb{R}	\mathbb{R}
$\text{I}(A)$	$\{0\}$	$\{0, 1\}$	$\{\frac{1}{n}\}$	$\{\frac{1}{n}\}$	\emptyset	\emptyset	\emptyset	\emptyset	\emptyset

$\mathcal{T}_{[,)}$										
A	$\{0\}$	$\{0, 1\}$	$\{\frac{1}{n}\}$	$\{\frac{-1}{n}\}$	$\{\frac{1}{n}\} \cup \{0\}$	$(0, 1)$	$[0, 1]$	\mathbb{Q}	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	\mathbb{R}
\bar{A}	$\{0\}$	$\{0\}$	$\{\frac{1}{n}\} \cup \{0\}$	$\{\frac{-1}{n}\}$	$\{\frac{1}{n}\} \cup \{0\}$	$[0, 1)$	$[0, 1]$	\mathbb{R}	\mathbb{R}	\mathbb{R}
\mathring{A}	\emptyset	\emptyset	\emptyset	\emptyset	\emptyset	$(0, 1)$	$[0, 1)$	\emptyset	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	\mathbb{R}
$\text{Fr}(A)$	$\{0\}$	$\{0, 1\}$	$\{\frac{1}{n}\} \cup \{0\}$	$\{\frac{-1}{n}\}$	$\{\frac{1}{n}\} \cup \{0\}$	$\{0\}$	$\{1\}$	\mathbb{R}	$\{0\}$	\emptyset
A'	\emptyset	\emptyset	$\{0\}$	\emptyset	$\{0\}$	$[0, 1)$	$[0, 1)$	\mathbb{R}	\mathbb{R}	\mathbb{R}
$\text{I}(A)$	$\{0\}$	$\{0, 1\}$	$\{\frac{-1}{n}\}$	$\{\frac{1}{n}\}$	$\{\frac{1}{n}\}$	\emptyset	$\{1\}$	\emptyset	\emptyset	\emptyset

Ejercicios de cálculo de interior, adherencia,...

Ejercicio 19. Calcular el interior, la adherencia, la frontera y los subconjuntos de puntos aislados y de acumulación de los siguientes subconjuntos de \mathbb{R} con la topología usual:

a) $A = (0, 1]$ **b)** $A = \left\{ \frac{1}{m} + \frac{1}{n} \mid m, n \in \mathbb{Z} \right\}$ **c)** $A = \text{Conjunto de Cantor}.$

Ejercicio 20. Calcular el interior, la adherencia, la frontera y los subconjuntos de puntos aislados y de acumulación de los siguientes subconjuntos de \mathbb{R}^2 con la topología usual:

a) $A = \{(x, y) \mid 1 < x^2 + y^2 \leq 2\}$ **b)** $A = \left\{ \left(x, \sin \left(\frac{1}{x} \right) \right) \mid x \neq 0 \right\} \cup \{(0, 0)\}$

Ejercicios de cálculo de interior, adherencia,...

Ejercicio 21. Calcular interior, adherencia, frontera y subconjuntos de puntos aislados y de acumulación de los siguientes subconjuntos de \mathbb{R}^2 con la topología usual:

c) $A = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) \mid xy = 0\}$ **d)** $A = \mathbb{R}^2 \setminus \left\{ \left(x, \sin \left(\frac{1}{x} \right) \right) \mid x \neq 0 \right\}$

e) $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{1}{2n} < x^2 + y^2 \leq \frac{1}{2n-1} \right\}.$

Ejercicios de cálculo de interior, adherencia,...

Ejercicio 22. Sea $A = (-4, -\sqrt{2}) \cup \{0\} \cup [\sqrt{2}, 3) \cup \left\{ \frac{3n+10}{n+3} \mid n \in \mathbb{N} \right\} \subset \mathbb{R}$.

Hallar \mathring{A} , \bar{A} y $\text{Fr}(A)$, A' e $I(A)$ en: **a)** \mathcal{T}_u , **b)** $\mathcal{T}_{[\cdot, \cdot)}$, **c)** $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$, $\mathcal{B} = \{[a, b) : a, b \in \mathbb{Q}\}$.

Ejercicios de cálculo de interior, adherencia,...

Ejercicio 23. Sea X un espacio topológico y $A, B \subset X$. Demostrar que:

- a) $\overline{A \cap B} \subset \bar{A} \cap \bar{B}$ (pero no tiene por qué darse la igualdad),
- b) si $A \cup B = X$ entonces $\overset{\circ}{A} \cup \bar{B} = X$,
- c) si $A \cap B = \emptyset$ entonces $\overset{\circ}{A} \cap \bar{B} = \emptyset$.

Axiomas de separación

Un espacio topológico X es:

T_1 si los subconjuntos unipuntuales cerrados (\Leftrightarrow para cada par x, y de puntos distintos de X , existen $U_1 \in \mathcal{U}^x$ y $U_2 \in \mathcal{U}^y$ tales que $y \notin U_1$ y $x \notin U_2$).

T_0 si para cada par x, y de puntos distintos de X , existe $U_1 \in \mathcal{U}^x$ tal que $y \notin U_1$, o existe $U_2 \in \mathcal{U}^y$ tal que $x \notin U_2$.

T_2 (o de Hausdorff) si para cada par x, y de puntos distintos de X , existen $U_1 \in \mathcal{U}^x$ y $U_2 \in \mathcal{U}^y$ tales que $U_1 \cap U_2 = \emptyset$.

Observación. $T_2 \Rightarrow T_1 \Rightarrow T_0$.

Ejemplo. La topología usual \mathcal{T}_u en \mathbb{R}^n y la topología $\mathcal{T}_{[)}$ en \mathbb{R} son T_2 .

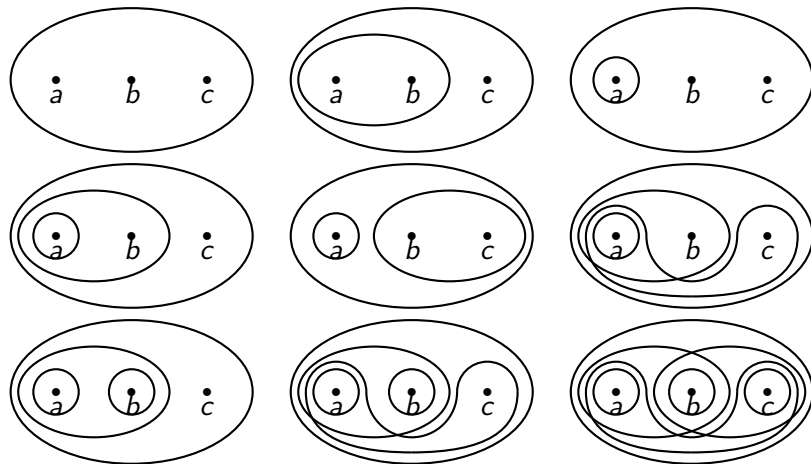
Ejemplo. Dado un conjunto X con dos o más elementos en la tabla se muestra qué axiomas de separación cumplen las topologías básicas que conocemos.

En el caso de \mathcal{T}_{CF} el resultado es válido si X es infinito, pues si X es finito, $\mathcal{T}_{CF} = \mathcal{T}_d$. (Análogamente, \mathcal{T}_{CN} es T_1 pero no es T_2 , salvo que $|X| \leq \aleph_0$, en cuyo caso $\mathcal{T}_{CN} = \mathcal{T}_d$).

	T_0	T_1	T_2
\mathcal{T}_d	SI	SI	SI
\mathcal{T}_{CF}	SI	SI	NO
\mathcal{T}_a	SI	NO	NO
\mathcal{T}_t	NO	NO	NO

Ejercicios. Axiomas de separación

Ejercicio 24. Clasifica las topologías en un espacio con 3 elementos según los axiomas de separación que cumplen.



Ejercicios de axiomas de separación

Ejercicio 25. Dado un espacio topológico X y una sucesión de puntos $(x_n) \subset X$, se dice que (x_n) converge a x si para todo entorno U de x existe n_0 tal que $x_n \in U$ para todo $n \geq n_0$.

Demuestra que si X es un espacio T_2 , entonces una sucesión de puntos de X converge a lo sumo a un punto de X .

¿Es cierto si X no es T_2 ?

Ejercicios de axiomas de separación

Ejercicio 26. Sea X un espacio T_1 , sea $A \subset X$ y sea $x \in X$. Demuestra que $x \in A'$ si y solo si todo entorno de x contiene infinitos puntos de A .

¿Es cierto si X no es T_1 ?

Funciones continuas

Sean X, Y espacios topológicos y $f : X \longrightarrow Y$. Se dice que f es **continua en $x \in X$** si para cada $V \in \mathcal{U}^{f(x)}$, existe un $U \in \mathcal{U}^x$ tal que $f(U) \subset V$.

Se dice que f es **continua en X** si y solo si lo es en todo punto $x \in X$.

Proposición. Sean X, Y espacios topológicos. Entonces $f : X \longrightarrow Y$ es continua en X si y solo si para cada subconjunto abierto V de Y , se tiene que $f^{-1}(V)$ es abierto en X .

Demostración. \Rightarrow) Sea V abierto de Y . Sea $x \in f^{-1}(V)$. Entonces $f(x) \in V$, luego existe $U \in \mathcal{U}^x$ tal que $f(U) \subset V$. Entonces $x \in U \subset f^{-1}(V)$. Luego $f^{-1}(V)$ es abierto.

\Leftarrow) Sea $x \in X$ y sea $V \in \mathcal{U}^{f(x)}$. Entonces $U = f^{-1}(V) \in \mathcal{U}^x$ y $f(U) \subset V$.

Proposición. Sean X, Y espacios topológicos. Entonces $f : X \longrightarrow Y$ es continua en X si y solo si $f^{-1}(B)$ es abierto de X para todo $B \in \mathcal{B}'$ base de la topología de Y .

Demostración. \Rightarrow) Inmediato

\Leftarrow) Sea V abierto de $Y \Rightarrow$ existe $\{B_i\} \subset \mathcal{B}'$ tal que $V = \bigcup_{i \in I} B_i \Rightarrow f^{-1}(V) = f^{-1}(\bigcup_{i \in I} B_i) = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(B_i)$ que es abierto por ser unión de abiertos.

Observación. Si $X = \mathbb{R}^m$ e $Y = \mathbb{R}^n$ con la topología usual, la definición de continuidad coincide con la de (ε, δ) . Por tanto, las funciones continuas de Cálculo siguen siendo continuas.

Funciones continuas

Proposición. Sea $f : X \longrightarrow Y$. Son equivalentes:

- a) f es continua en X .
- b) $f^{-1}(C)$ es cerrado en X para todo subconjunto cerrado C de Y .
- c) $f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)}$ para todo $A \subset X$.

Demostración. (a) \Rightarrow (b) Sea C cerrado de $Y \Rightarrow f^{-1}(C)$ es cerrado porque $X \setminus f^{-1}(C) = f^{-1}(Y \setminus C)$ es abierto.

(b) \Rightarrow (a) Sea V abierto de $Y \Rightarrow f^{-1}(V)$ es abierto porque $X \setminus f^{-1}(V) = f^{-1}(Y \setminus V)$ es cerrado.

(b) \Rightarrow (c) Sea $A \subset X \Rightarrow$ como $\overline{f(A)}$ es cerrado en Y , $f^{-1}\overline{f(A)}$ es cerrado en $X \Rightarrow$ como $A \subset f^{-1}f(A) \subset f^{-1}(\overline{f(A)})$, se tiene $\bar{A} \subset f^{-1}\overline{f(A)} \Rightarrow f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)}$.

(c) \Rightarrow (b) Sea C cerrado de Y y sea $A = f^{-1}(C) \Rightarrow f(\overline{f^{-1}(C)}) = f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)} = \overline{ff^{-1}(C)} \subset \bar{C} = C \Rightarrow \overline{f^{-1}(C)} \subset f^{-1}(C) \Rightarrow \overline{f^{-1}(C)} = f^{-1}(C) \Rightarrow f^{-1}(C)$ es cerrado.

Ejercicio 27. Si $f : X \longrightarrow Y$ es continua ¿hay alguna relación entre $f(\mathring{A})$ y $\mathring{\overline{f(A)}}$?

Homeomorfismos

Sean X e Y espacios topológicos y sea $f : X \longrightarrow Y$ una biyección. Si f y f^{-1} son ambas continuas, se dice que f es un **homeomorfismo**.

Si existe un homeomorfismo de X a Y se dice que X e Y son **homeomorfos** y se denota $X \simeq Y$.

Proposición. Sean X e Y espacios topológicos y sea $f : X \longrightarrow Y$ una biyección. Entonces f es un homeomorfismo si y solo si se cumple que:

“ $U \subset X$ es abierto de X si y solo si $f(U)$ es abierto de $f(X)$ ”.

Ejemplo. $X = \{a, b, c\}$ con la topología $\mathcal{T}_1 = \{\emptyset, \{a\}, \{a, b, c\}\}$ es homeomorfo a X con la topología $\mathcal{T}_2 = \{\emptyset, \{b\}, \{a, b, c\}\}$, pero no a X con la topología $\mathcal{T}_3 = \{\emptyset, \{a, b\}, \{a, b, c\}\}$

Lema. Sean $f : X \longrightarrow Y$, $g : Y \longrightarrow Z$ continuas. Entonces $gf : X \longrightarrow Z$ es continua.

Teorema. La relación “ser homeomorfo a” es una relación de equivalencia en el conjunto de los espacios topológicos. Es decir:

a) $X \simeq X$, **b)** $X \simeq Y \Rightarrow Y \simeq X$, **c)** $X \simeq Y$ e $Y \simeq Z \Rightarrow X \simeq Z$.

Ejercicio 28. Demostrar los resultados de esta transparencia.

Ejercicios sobre continuidad y homeomorfismos

Ejercicio 29. Sea X un conjunto con dos topologías \mathcal{T} y \mathcal{T}' . Demostrar que la identidad $\text{Id} : (X, \mathcal{T}) \longrightarrow (X, \mathcal{T}')$, $\text{Id}(x) = x$ es continua si y sólo si \mathcal{T} es más fina que \mathcal{T}' .

Ejercicio 30. Probar que existen funciones de $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\lfloor})$ en $(\mathbb{N}, \mathcal{T}_d)$ sobreyectivas y continuas, pero que no existen funciones de $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\lfloor})$ en $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_d)$ con esas propiedades.

Indicación: La imagen inversa de \mathbb{R} sería una unión no numerable de abiertos disjuntos y $[a, b)$ contiene siempre un número racional.

Ejercicios sobre continuidad y homeomorfismos

Ejercicio 31. Demostrar que las propiedades T_0 , T_1 y T_2 son topológicas, esto es, se conservan por homeomorfismos.

Ejercicios sobre continuidad y homeomorfismos

Ejercicio 32. Hallar una función biyectiva que transforme abiertos en abiertos pero que no sea un homeomorfismo.

Ejercicio 33. Estudiar si $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{[)})$, es homeomorfo a $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{(]})$. ¿Es la identidad entre ambos espacios un homeomorfismo?

Ejercicios sobre continuidad y homeomorfismos

Ejercicio 34. Demostrar que $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{CF})$ no es homeomorfo a $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{[]})$.

Ejercicio 35. Demostrar que si $f : (X, \mathcal{T}_{CF}) \longrightarrow (Y, \mathcal{T})$ es continua con \mathcal{T} topología T_2 , entonces f es constante.

La recta digital

Se dice que un espacio topológico es **localmente finito** si todo punto p está contenido en un abierto finito y en un cerrado finito.

Ejemplos en \mathbb{Z} . a) La topología en \mathbb{Z} cuyos subconjuntos abiertos son los intervalos semi-infinitos de la forma $\{n \in \mathbb{Z} \mid n \geq n_0\}$ es una topología T_0 que no es localmente finita.

b) La topología de los complementos finitos no es ni T_0 , ni T_1 , ni localmente finita.

c) La topología de los complementos numerables coincide con la topología discreta.

d) La topología que tiene por base los abiertos de la figura:



es T_0 (pero no T_1) y es localmente finita.

e) Si \mathcal{T} topología en \mathbb{Z} es localmente finita y T_1 entonces \mathcal{T} es la topología discreta.

Observación. Dado un espacio topológico localmente finito, para todo punto p existe un abierto mínimo $O(p)$ y un cerrado mínimo $C(p)$ que lo contiene.

Los subconjuntos $O(p)$ forman una base de la topología.

La recta digital

Llamaremos **recta digital** a \mathbb{Z} con la topología cuyos entornos abiertos mínimos son

$$O(m, n) = \begin{cases} \{n\} & \text{si } n \text{ es impar} \\ \{n-1, n, n+1\} & \text{si } n \text{ es par,} \end{cases}$$



Es una topología T_0 (no T_1) localmente finita, en la que los puntos impares son abiertos y los pares cerrados.

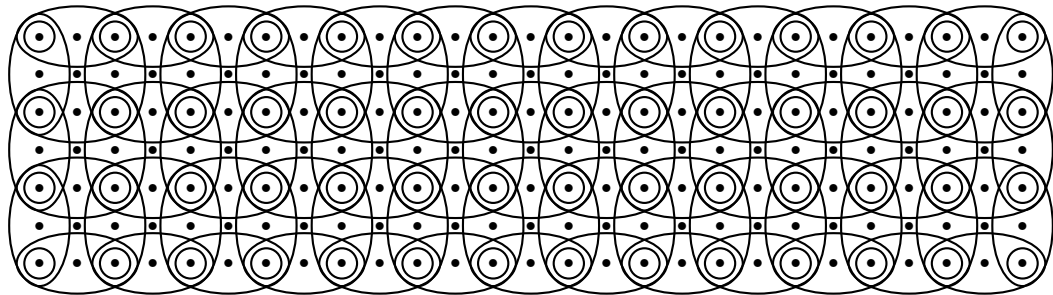
Es un modelo para la recta digital si identificamos los números impares (que son abiertos) con los pixels y los pares como las fronteras entre ellos. Es decir, consideramos la recta digital como un subconjunto de pixels abiertos (correspondientes con los enteros impares) junto con un subconjunto de fronteras cerradas (correspondientes a los enteros pares).



El plano digital

Llamaremos **plano digital** a \mathbb{Z}^2 con la topología cuyos entornos abiertos mínimos son

$$O(n) = \begin{cases} \{(m, n)\} & \text{si } m, n \text{ son impares} \\ \{(m-1, n), (m, n), (m+1, n)\} & \text{si } m \text{ par, } n \text{ impar} \\ \{(m, n-1), (m, n), (m, n+1)\} & \text{si } m \text{ impar, } n \text{ par} \\ \{(m+a, n+b) \mid a, b = -1, 0, 1\} & \text{si } m, n \text{ pares,} \end{cases}$$



Es una topología T_0 (no T_1) localmente finita, en la que los puntos con dos coordenadas impares (resp. pares) son abiertos (resp. cerrados).

El plano digital

Es un modelo para el plano digital si identificamos:

- los números de la forma (impar,impar), que son abiertos, con los pixels,
- los de la forma (impar,par) con las fronteras horizontales de los pixels
- los de la forma (par,impar) con las fronteras verticales de los pixels
- los de la forma (par,par) con los puntos frontera de las esquinas.

